Grado 11

Matematicas - Unidad 1

Operando en el conjunto de los números reales

Tema

Caracterización de los números reales

Nombre: ______________________________ **Curso:** __________

Introducción

Breve historia de los reales

A continuación se da una brevísima historia sobre los números reales, pero antes de esto es necesario describir algunos conceptos.

Primero el proceso de medir consiste en comparar dos magnitudes, una, lo que hoy se conoce como patrón de medida, con otra, que es lo que se quiere medir.

Una magnitud conmensurable es aquella que se puede medir y además su medida se puede escribir como factor de la unidad de medida.

Una magnitud inconmensurable es lo opuesto a conmensurable, es decir su medida no se puede expresar como factor de una unidad de medida.

Los griegos, y en particular la escuela pitagórica, consideraba que todos los fenómenos del universo se podían reducir a números o razones entre ellos, es decir, que todo es conmensurable.

Pero uno de ellos, Hippasus de Metapontum, descubrió una magnitud inconmensurable, la diagonal de un cuadrado de lado 1, por esto se dice que fue arrojado al mar, ya que dicho descubrimiento echaba por tierra todo lo que los pitagóricos creían.

El pensamiento griego se mantuvo casi intacto por mas de un millar de años y la geometría era la base sobre la cual se construían las matemáticas.

Pero en el renacimiento, algunos matemáticos objetaban el uso de los números irracionales de manera descuidada, ya que carecían de rigor y fundamentación lógica.

Matemáticos de la talla de Euler demostraron que algunos números eran irracionales, pero es hasta el siglo XIX que varios matemáticos se dan a la tarea de hacer una construcción formal para los números reales. Entre estos se destacan Cauchy, Weiestrass, Cantor y Dedekind, entre otros.

Empezando el siglo XX Hilbert considera que las construcciones dadas en el siglo pasado, las cuales se basan en los racionales, son valiosas pedagógicamente hablando, pero considera que su método debe prevalecer. Por tanto propone su propia construcción, la cual se conoce como método axiomático.

Actividad Introductoria

1. **Realiza un glosario individualmente, con base en la lectura anterior, y compáralo con los glosarios de tus otros compañeros. Discute el significado de las palabras que aparezcan en el glosario de ellos y no del tuyo y viceversa.**

Objetivos

» Determinar el conjunto de los números reales a través de sus propiedades.

» Reconocer el conjunto de números reales a partir de procesos históricos.

» Reconoce los intervalos como conjuntos de números reales.

» Caracterizar el conjunto de los números reales a partir de las propiedades de los racionales e irracionales.

Actividad 1: “Un tal David Hilbert…“

1. **Lee detalladamente la construcción axiomática de los reales propuesta por Hilbert .**

Hilbert supone que existe un conjunto no vacío R de elementos, llamados los números reales, que satisfacen 10 axiomas. Estos axiomas se dividen en tres clases o tipos: axiomas de cuerpo, axiomas de orden y axioma de completitud, los cuales se van a mostrar a continuación:

Axiomas de cuerpo

Además de aceptar el conjunto **R** se debe suponer la existencia de dos operaciones, la suma y la resta, las cuales cumplen el siguiente grupo de axiomas:

1. $a+(b+c) = (a+b)+c$
2. $a+b = b+a$
3. $a(bc) = (ab)c$
4. $a(b+c) = ab+ac$
5. $(a+b)c = ac+bc$
6. $ab = ba$

2. Responde:

a. ¿Te son familiares estos axiomas?

b. ¿Usualmente como se han venido llamando estos axiomas?

c. Deduce de estos axiomas otras leyes o propiedades de los números reales que conozcas.

Axiomas de orden

1. Si a y b son dos números distintos cualesquiera, hay siempre uno determinado de ellos (p.ej. a) mayor (>) que el otro; éste, se dice entonces, que es el menor. Simbólicamente se escribe $a>b$ y $b<a$.
2. Si $a>b$ y $b>c$, también $a>c$.
3. Si $a>b$, se verifica siempre también que $a+c > b+c$ y $c+a > c+b$.

Estas propiedades serán abordadas mas adelante, en el desarrollo del curso.

3. Verifica, con parejas o ternas de números reales, los axiomas de orden. Da tres ejemplos para cada axioma.

Axiomas de completitud

Este axioma es el que diferencia a los reales de los demás conjuntos ordenados, como los racionales, los enteros o los irracionales. Enunciarlo, por el lenguaje que se usa, no resulta apropiado, pero mencionar la implicación mas importante resulta algo mas sencillo.

El hecho de que los reales sean un conjunto numérico ordenado y completo implica que se puede establecer una relación biyectiva entre los reales y los puntos de una recta, de tal modo que a cada uno de los números reales le corresponde un punto en una recta y viceversa.

Dicha característica permite mas adelante hablar de conceptos como densidad y continuidad.

4. ¿Entendiste eso de la completitud? En tus palabras o por medio de un dibujo intenta explicar qué significa que se pueda establecer una relación biyectiva entre los reales y los puntos de una recta. Socializa tu respuesta con tus compañeros y discute sobre la mas adecuada.

Actividad 2: ¿Cortaduras de quien?

Dedekind propone lo siguiente:

Consideremos que en una recta numérica se representan los racionales, esto porque eran los números bien fundamentados en la época de Dedekind. Supongamos que no sabemos que al estar solo los racionales en dicha recta esta no estaría “completa“. Un punto en la recta numérica divide a esta en dos subconjuntos de números racionales A y B, tales que todos los elementos de A son menores que todos los elementos de B y todos los elementos de B son mayores que todos los elementos de A, lo cual se muestra en la siguiente grafica:

Si llamamos x al punto que genera los conjuntos A y B, estos se definen de la siguiente forma:

$$A=\{r\in Q \ / \ r<x\} \text{ y } B=\{r\in Q \ / \ r>x\}$$

Se dice que cada punto de una recta define una y solo una división de la recta. Dicho punto es un número real.

Dedekind llama cortadura a dicha división o separación de la recta en estos dos conjuntos A y B, esto debido a que “corta” la recta.

Por lo anterior, afirma que un número real es una cortadura.

Por ejemplo hablar del número real 2 equivale a hablar de la cortadura que define los conjuntos

$$A=\{r\in Q \;/\; r<2\} \text{ y } B=\{r\in Q \;/\; r>2\}$$

1. Con base en lo anterior construyan las cortaduras para los números.

a. 4
b. -5
c. 1/2

2. Responde:

a. ¿Es posible construir una cortadura que defina los siguientes conjuntos $A=\{r\in Q \;/\; r^{2}2<2\}$ y $B=\{r\in Q \;/\; r^{2}2>2\}$?

b. ¿Quién es r?

c. ¿Es r un número racional?

Actividad 3: ¡A falta de una construcción tenemos muchas!

Algo sobre otras construcciones para los reales

La construcción por cortaduras de los números reales permite evidenciar la existencia de unos nuevos números, los irracionales, los cuales son los que ayudan a definir cortaduras de ese tipo.

Ahora, de las otras construcciones realizadas en el siglo XIX definen el mismo conjunto y a continuación se mostraran algunas particularidades de algunas de ellas.

De la construcción de Cauchy se destaca que utiliza sucesiones, las cuales llama fundamentales, y considera el hecho de que sumas de números racionales convergen en números irracionales.

Por ejemplo, que es un irracional, se puede representar de la siguiente manera:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{2n+1} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \ldots = \pi$$

Se puede observar que cada termino de la suma es un numero racional.

1. Cuáles son los siguientes 10 términos de la serie?

Halla la suma de los primeros 4, 5 y 10 términos de la serie y compara dichos resultados con la expresión decimal de π con 6 cifras decimales y concluye algo al respecto.

Weierstrass considera que un numero racional puede ser expresado por la suma finita de otros racionales. En particular de racionales de la forma 1/n.

Por ejemplo

$$1 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

Resulta evidente que todo real tiene infinitas sumas racionales que lo representa. Por ejemplo

$$1 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right\} = \ldots$$

Luego define unos nuevos números, los cuales son expresados por una suma infinita de racionales de la forma 1/n. Los irracionales.

Por ejemplo, una representación por este método del irracional $\pi=3,1415\ ...=$

$$\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{10},\frac{1}{100},\frac{1}{100},\frac{1}{100},\frac{1}{100},\frac{1}{1000},\frac{1}{10000},\frac{1}{10000},\frac{1}{10000},\frac{1}{10000},\frac{1}{10000},\ ...\right\}$$

2. Con base a lo anteriormente descrito expresa los siguientes números usando el método de Weierstrass:

$\sqrt{2}$ =

16=

e=

2=

3. ¿Qué ves en común en los métodos anteriormente descritos?

Con cada una de las construcciones propuestas para definir los reales, cada uno de los autores define todas las propiedades que Hilbert nombra como axiomas.

Por esto se considera que el conjunto de los números reales es único.

Actividad 4: Intervalos

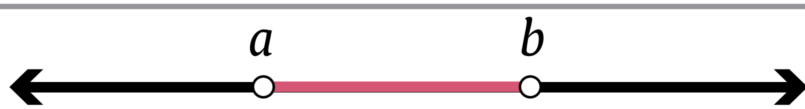
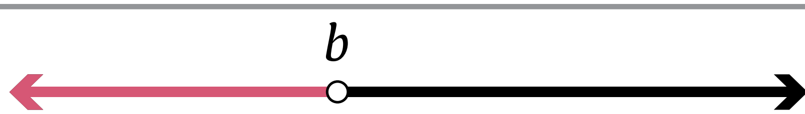
Sean a y b dos números reales con tales que a‹b.

Un intervalo cerrado es el conjunto de todos los números reales x para los cuales se cumple $a \leq x \leq b$ y se denota por $[a,b]$.

Un intervalo abierto es el conjunto de todos los números reales x para los cuales se cumple $a<x<b$, se denotado por (a,b).

Por ultimo se definen los intervalos semi abiertos o semi cerrados, de los cuales hay dos clases, el primero denotado por $(a,b]$, el cual consiste de todos los números reales x para los cuales se cumple $a< x \leq b$; y el segundo [a,b), que consiste en todos los números reales x para los cuales se cumple $a\leq x <b$.

A continuación se muestra la notación de intervalo, su representación grafica y su representación con desigualdades:

	Intervalo	Gráfica	
Acotados	(a,b)		$a< x <b$
	$[a,b]$		$a\leq x \leq b$
	$[a,b)$		$a\leq x <b$
	$(a,b]$		$a< x \leq b$
No acotados	(a,∞)		
	$[a,\infty)$		
	$(-\infty,b)$		
	$(-\infty,b]$		
	$(-\infty,\infty)$		

1. **Expresa cada desigualdad con una notación de intervalo.**

a. $-2 < x \leq 1$

b. $0 \geq x$

c. $4 < x < 8$

2. **Muestra cada uno de los intervalos como una gráfica en la recta numérica**

a. $[-2, \infty)$

b. $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$

c. $[0,3]$

3. **De lo anterior, responde las siguientes preguntas:**

a. La definición de intervalo explicita que es un conjunto de números reales ¿por qué hacer esto explicito es necesario?

b. ¿Cómo seria la representación grafica de un intervalo definido en el conjunto de los enteros? ¿y en el de los racionales?

c. Con base a lo anterior, ¿qué relación se puede establecer entre los reales y los demás conjuntos numéricos?

d. Por ultimo, las construcciones o nociones de construcciones que se vieron sobre los reales intentan definir dos tipos de números, los racionales y los irracionales. Con base a esto y de acuerdo a todo lo anteriormente mencionado ¿cómo se pueden definir los reales en términos de racionales e irracionales? Represéntalo en un diagrama.

Resumen

Enlista los temas tratados en el desarrollo de las actividades, luego asocia palabras claves a cada uno de ellos, las cuales ayudaron a desarrollar cada tema.

Tarea

1. **Define en tus palabras los métodos de construcción de los reales de Hilbert, Cauchy, Dedekind y Weierstrass. Para esto, de ser necesario, consulta mas sobre cada uno de estos métodos y pide ayuda al docente de matemáticas con los términos desconocidos.**

2. **Expresa cada desigualdad con una notación de intervalo.**

   a. $-4 < x \leq 7$

   b. $x < -3$

   c. $3 \geq x \geq -1$

3. **Muestra cada uno de los intervalos como una gráfica en la recta numérica.**

   a. $[-3,\infty)$

   b. $\left(\frac{7}{2},14\right)$

   c. $[0, 6.25]$

   d. $(-\infty, 1)$

   e. $(-2, 2]$